数理解析研究所講究録 1376 巻 2004 年 145-153

ARITHMETIC コホモロジーと ζ-関数の特殊値

THOMAS GEISSER*

UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA/ 東京大学

1. 滑らかで射影的なスキームの場合

Lichtenbaum は 2001 年に Weil-étale コホモロジーを導入し, $\mathbb{Z}$-係数の Weil-étale コホモロジーと ζ-関数の $s=0$ における特殊値の関係を表した.

簡単に言えば, Weil-étale コホモロジーは $\mathbb{F}_p$ の Galois-群 $\hat{\mathbb{Z}}$ を Frobenius 置換 φ で生成された巡回部分群で取り替えるものである. 例えば,

$$H^1((\mathbb{F}_p)_{\text{ét}},\mathbb{Z})\cong \operatorname{Hom}(\hat{\mathbb{Z}},\mathbb{Z})=0, \qquad H^2((\mathbb{F}_p)_{\text{ét}},\mathbb{Z})\cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

であるが,

$$H^1((\mathbb{F}_p)_W,\mathbb{Z})\cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})=\mathbb{Z}, \qquad H^2((\mathbb{F}_p)_W,\mathbb{Z})\cong 0$$

のように, Weil-étale コホモロジーはétale コホモロジーより簡単だと見られる. $H^1((\mathbb{F}_p)_W,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ の生成元を一つをとって, e と書く.

2002 年, [1] において著者は, Weil-étale コホモロジーとétale コホモロジーの関係を示して, 次の定理を証明した.

定理 1.1. *X を $\mathbb{F}_p$ 上の分離的で有限形なスキームとし, $\mathcal{F}$ を X-上の etale 層とする.*

a) 次の長完全系列が存在する.

$$\to H^i(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\to H^i(X_W,\mathcal{F})\to H^{i-1}(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}\to H^{i+1}(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\to$$

b) 特に $\mathcal{F}$ が torsion ならば, $H^i(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\cong H^i(X_W,\mathcal{F})$.

c) $\mathcal{F}$-が $\mathbb{Q}$-加群ならば, 上の長完全系列が分裂する, つまり

$$H^i(X_W,\mathcal{F})\cong H^i(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\oplus H^{i-1}(X_{\text{ét}},\mathcal{F}).$$

モチビック複体 $\mathbb{Z}(n)$ の定義は Voevodsky と Bloch によるのである. 定義は少し複雑であるので, 本文では詳細については省略するが, 最も簡単な例として $\mathbb{Z}(0)\cong\mathbb{Z}$ (定数層) と $\mathbb{Z}(1)\cong\mathbb{G}_m[-1]$ (乗法群の shift) であることが知られている.

* Supported in part by the Alfred P. Sloan Foundation, and NSF.

モチビック複体$\mathbb{Z}(n)$によるWeil-étaleコホモロジーとζ-関数の関係について, 次の主予想がある. $n=0$の場合はLichtenbaum[3]の予想である.

予想 1.2. Xを$\mathbb{F}_p$上の滑らかで射影的なスキーム, $\zeta(X,s)$をXのゼータ関数とする.

1. モチビック複体$\mathbb{Z}(n)$の*Weil-étale*コホモロジー$H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))$は有限生成である.
2. 任意の素数$l\neq p$に対して, l-進コホモロジーの整数モデルである:
$$H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{Z}_l\cong H^i(X_{\text{ét}},\mathbb{Z}_l(n)).$$
3. 階数の交代和は0: $\sum_i(-1)^i\operatorname{rank}H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))=0$.
4. 階数の重さ付き交代和は$s=n$における$\zeta(X,s)$の零点の位数ρ_nと等しい:
$$\sum_i(-1)^i i\cdot\operatorname{rank}H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))=\operatorname{ord}_{s=n}\zeta(X,s).$$
5. $s\to n$のとき,
$$\zeta(X,s)\sim\pm(1-q^{n-s})^{\rho_n}\cdot\chi(H^*(X_W,\mathbb{Z}(n)),e)\cdot q^{\chi(n)}.$$
ここで, $\chi(H^*(X_W,\mathbb{Z}(n)),e)$は$e$との*cup*積によって定義される複体
$$\to H^{i-1}(X_W,\mathbb{Z}(n))\xrightarrow{\cup e}H^i(X_W,\mathbb{Z}(n))\xrightarrow{\cup e}H^{i+1}(X_W,\mathbb{Z}(n))\to$$
の*Euler*標数$\chi(C^\cdot)=\prod_i|H^i(C^\cdot)|^{(-1)^i}$で, $\chi(n)$は*Milne*の標数
$$\chi(n)=\sum_{j,0\le i\le n}(-1)^{i+j}(n-i)\dim H^j(X,\Omega^i).$$

注意. 実際には, (3), (4) より詳しい予想がある:
$$\operatorname{rank}H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n))=\operatorname{rank}H^{2n+1}(X,\mathbb{Z}(n))=\rho_n$$
で, $i\neq 2n,2n+1$ならば, $\operatorname{rank}H^i(X,\mathbb{Z}(n))=0$である. また, (2) の$p$進類似に相当する予想もある.

上の予想と次の有名な予想との関係について考える.

予想 1.3. *(Tate-Beilinson)* 任意の$\mathbb{F}_p$上の滑らかで射影的なスキームXに対して, 次のことが成り立つ.

1) *cycle*射は同型である
$$\mathrm{CH}^n(X)\otimes\mathbb{Q}_l\xrightarrow{\sim}H^{2n}(\bar{X}_{\text{ét}},\mathbb{Q}_l(n))^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)}.$$

2) $H^{2n}(\bar{X}_{\text{ét}},\mathbb{Q}_l(n))$は$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$-加群として半単純である.

定理 1.4. 予想*1.3*と予想*1.2*は同値である.

この論文では, 上の定理の $\mathbb{F}_p$-上の分離的で有限形なスキームへの一般化について述べる. 詳しい証明は [2] にある.

2. EH-コホモロジー

体 k を固定して、(Sch/k) と (Sm/k) をそれぞれ k 上の分離的で有限形なスキームと k 上の滑らかなスキームの圏とする.

定義 2.1. eh-位相は、次の射からなる *Grothendieck*-位相である.

1) (étale) étale な全射 $f : Y \to X$.

2) (abstract blow-up) 次の条件を満たすような固有射 $f : X' \to X$ と閉埋込射 $i : Z \to X$ の和 $X' \amalg Z \to X$. *(条件): Z' を次の cartesian* 図式で定義する.

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & X' \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array} \tag{1}$$

このとき f によって $f : X' - Z' \to X - Z$ という同型が成立する.

例 : 任意の閉被覆は eh-被覆であり, $X^{red} \to X$ は eh-被覆である.

(Sch/k) 上の eh-位相における層の圏を $(Sch/k)_{\mathrm{eh}}$ と書く. eh-層 $\mathcal{F}$ に対して, eh-コホモロジー $H^i(X_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F})$ を大域切断 $\Gamma(X, \mathcal{F})$ の右導来関手で定義する.

命題 2.2. *abstract blow-up*(1) を与えると, 次の長完全系列が存在する.

$$\cdots \to H^i(X_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to H^i(Z_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \oplus H^i(X'_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to H^i(Z'_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to \cdots. \tag{2}$$

証明. すべての X に対して, $\mathbb{Z}_X$ を X が表現する自由 *eh*-層とする (いいかえれば, 前層 $U \to \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}(U, X)]$ に伴う eh-層). 積の普遍性により, 次の完全系列を得る

$$0 \to \mathbb{Z}_{Z'} \to \mathbb{Z}_Z \oplus \mathbb{Z}_{X'} \to \mathbb{Z}_X.$$

しかも, (1) は eh-被覆なので右の射は全射で, 命題が従う. □

定義 2.3. 任意の k 上の分離的で有限生成なスキーム U に対して, コンパクトコホモロジー群 $H^i_c(U_{eh}, \mathcal{F})$ を次のように定義する. U のコンパクト化 X をとり, $Z = X - U \xrightarrow{i} X$ を U の閉補集合の埋め込みとする. このとき,

$$H^j_c(U_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) = H^{j-1}(X_{\mathrm{eh}}, cone(\mathcal{F} \to i_* i^* \mathcal{F})).$$

補題 2.4. コンパクトコホモロジーの定義は X のコンパクト化によらない.

証明. X と X' を U のコンパクト化とする. 積 $X \times X'$ における U の閉包と比較することにより, 射 $X' \to X$ が存在すると仮定してよい. $Z = X - U \xrightarrow{i} X$, $Z' = X' - U \xrightarrow{i'} X'$ とおけば, abstract blow-up 図式(1) を得る. 長完全系列(2) を用いて, 次の可換図式から結論を示せる.

$$\begin{array}{ccccccc}
\to H^{j-1}(X_{\mathrm{eh}}, \mathrm{cone}(i)) & \longrightarrow & H^j(X_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^j(Z_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\to H^{j-1}(X'_{\mathrm{eh}}, \mathrm{cone}(i')) & \longrightarrow & H^j(X'_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^j(Z'_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to
\end{array}$$

□

任意のスキーム X の閉部分スキーム Z の開補集合を U とする. コンパクトコホモロジーの定義から, 明らかに次の長完全系列が存在することがわかる.

$$\cdots \to H^j_c(U_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to H^j_c(X_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to H^j_c(Z_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to \cdots. \quad (3)$$

これから k 上で特異点の解消が存在すると仮定する. つまり, 次の条件が成り立つと仮定する.

1) 任意のスキーム $X \in (Sch/k)$ について, $f : Y \to X$ が存在して, Y は k 上滑らかで, f は固有的で双有理射となる.

2) X は滑らかならば, 任意の固有的で双有理射 $f : Y \to X$ に対して, $g : X' \to Y$ が存在して、$f \circ g : X' \to X$ は滑らかな閉部分スキームを中心とする blow-up の合成となる.

k の標数が 0 ならば, この条件は広中の定理である. blow-up は eh-位相の被覆だから, 特異点の解消により任意のスキームは局所的に滑らかである.

次の site の射が存在する.

$$(Sch/k)_{\mathrm{eh}} \xrightarrow{\rho} (Sm/k)_{\text{ét}}.$$

これらは層の圏に標準関手を導く:

$\rho_*(\mathcal{F})(X) = \mathcal{F}(X)$ で, ρ^* はその左随伴関手である.

$\rho_*(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の滑らかなスキームへの制限で, ρ^* はその左随伴関手である. 具体的には, $\rho^*(\mathcal{F})(X) = \mathrm{colim}_{X \to U} \mathcal{F}(U)$ に伴う eh-層であり, $\mathcal{F}$ の拡張の層化である (U が X の下の滑らかなスキームを走る).

補題 2.5. ρ_* は左完全である. k 上で特異点の解消が成り立てば, ρ^* は完全である.

定理 2.6. *(Suslin, Voevodsky)* [5] $\frac{1}{m} \in k$ ならば、$\rho_* \mu_m^{\otimes n} \cong \mu_m^{\otimes n}$ で, $s > 0$ のとき $R^s \rho_* \mu_m^{\otimes n} = 0$.

Voevodsky は任意の自然数 n に対して, (Sm/k) 上にétale 層の複体 $\mathbb{Z}(n)$ を定義した. $\mathbb{Z}(n)$ の $(Sch/k)_{\mathrm{eh}}$ への拡張 $\rho^*\mathbb{Z}(n)$ も又 $\mathbb{Z}(n)$ と書くことにする. $\mathbb{Z}(n)$ の eh-コホモロジーについて次が成り立つ.

命題 2.7. $\frac{1}{m} \in k$ ならば, $\mathbb{Z}/m(n) \cong \mu_m^{\otimes n}$.

証明. 滑らかなスキーム X 上では, この系は先に知られている. 一般のスキーム X 上では, X は仮定によって滑らかな被覆 Y を持ち, Y 上ではこの同型が成り立つので, X 上でも成り立つ. □

次の定理で(2) の類似が必要になる.

命題 2.8. *滑らかなスキーム X の滑らかな閉部分スキーム Z を中心とする blow-up(1) を与える.*

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{i'} & X' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array} \tag{4}$$

そのとき, 次の長完全系列が存在する.

$$\to H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i(Z_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \oplus H^i(X'_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i(Z'_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \to . \tag{5}$$

定理 2.9. *X が滑らかならば,*

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n)) \cong H^i(X_{\mathrm{eh}}, \mathbb{Z}(n)).$$

証明. $C^\cdot$ を $\mathrm{cone}(\mathbb{Z}(n)^{\text{ét}} \to R\rho_*\mathbb{Z}(n)^{\mathrm{eh}})$ とおくと, $C^\cdot$ はétale と eh-コホモロジーの違いを計る. $0 \neq \alpha \in H^i(X_{\text{ét}}, C^\cdot)$ が存在すると仮定して矛盾を導く. 明らかに $\rho^*C^\cdot$ は完全なので, eh-被覆 $f : Y \to X$ が存在して, $f^*C^\cdot = 0$ を満たす. 特異点の解消を用いて, $f : Y \to X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_0 = X$ と書ける. ここで, $Y \to X_n$ は etale 被覆で, $X_{i+1} \to X_i$ は滑らかな閉部分スキーム Z_i を中心とする blow-up である. 長完全系列(2) と(5) を比べる. 次元に関して帰納法を用いると, $H^i((Z_i)_{\text{ét}}, C^\cdot) \cong H^i((Z_i \times_{X_i} X_{i+1})_{\text{ét}}, C^\cdot) = 0$ を仮定してよい. よって, $H^i((X_i)_{\text{ét}}, C^\cdot) \cong H^i((X_{i+1})_{\text{ét}}, C^\cdot)$ なので, $\alpha|_{X_n} \neq 0$ で, $C^\cdot|_{X_n} \neq 0$. 従って, $C^\cdot|_Y \neq 0$ は矛盾である. □

命題 2.10. *a) (Homotopy不変性) 任意の X, $n > 0$ に対して,*

$$H_c^i(X \times \mathbb{A}^1_{\mathrm{eh}}, \mathbb{Z}(n)) \cong H_c^{i-2}(X_{\mathrm{eh}}, \mathbb{Z}(n-1)).$$

b) $n > r$ ならば, Projective bundle公式が成り立つ.

$$H_c^i(X \times \mathbb{P}^r_{\mathrm{eh}}, \mathbb{Z}(n)) \cong \oplus_{j=0}^r H_c^{i-2j}(X_{\mathrm{eh}}, \mathbb{Z}(n-j)).$$

証明. 特異点の解消と長完全系列(3) を用いて滑らかで射影的な場合から導く. □

homotopy 不変性は任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つために, $n > 0$ のとき

$$H_c^i(X_{\mathrm{eh}}, \mathbb{Z}(-n)) := H_c^{i+2n}(X \times \mathbb{A}^n_{\mathrm{eh}}, \mathbb{Z}(0))$$

と定義する. すると, homotopy 不変性も projective bundle 公式も任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して成り立つ.

3. Arithmetic コホモロジー

定義 3.1. $\mathbb{F}_p$ 上の *Weil-eh* 層 $\mathcal{F}$ を $(Sch/\bar{\mathbb{F}}_p)_{\mathrm{eh}}$ の元 $\mathcal{F}$ と *Frobenius* 作用 $\varphi : \mathcal{F} \to \varphi_* \mathcal{F}$ の組と定義する.

$\mathbb{F}_p$ 上の *Weil-eh* 層の圏を $(Sch/\mathbb{F}_p)_W$ と書く.

$\mathbb{F}_p$ 上分離的で有現生成なスキーム X に対して, 大域切断 $\mathcal{F} \to \Gamma_{\mathrm{eh}}(X \times_{\mathbb{F}_p} \bar{\mathbb{F}}_p, \mathcal{F})^{\varphi=1}$ の右導来関手を $H^i(X_{ar}, \mathcal{F})$ と定めて, *arithmetic* コホモロジーと呼ぶ.

$H_c^i(X_{ar}, \mathcal{F})$ は同様に定義される.

定理 2.9 によると, 特異点の解消が存在すれば, $\mathbb{F}_p$ 上の滑らかなスキーム X に対して, $H^i(X, \mathcal{F})$ は [1] で定義されたコホモロジー群と同型. しかも, 定理 1.1 の類似が成り立つ. 例えば, 次の長完全系列が存在する

$$\to H^i(X_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to H^i(X_{\mathrm{ar}}, \mathcal{F}) \to H^{i-1}(X_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q} \to H^{i+1}(X_{\mathrm{eh}}, \mathcal{F}) \to$$

予想 3.2. $H^i(X_W, \mathbb{Z}(n))$ を $H_c^i(X_{ar}, \mathbb{Z}(n))$ で取り替えると, 予想 *1.2* が任意の $\mathbb{F}_p$ 上の分離的で有限形なスキーム X に対して成り立つ.

定理 3.3. 予想 *1.2* を仮定し, 特異点の解消が存在すると仮定する. このとき, 予想 *3.2* も成り立つ.

証明. 例として (1) を導く. X の次元に関する帰納法をする. U を任意の $\mathbb{F}_p$ 上の分離的で有限形なスキームとする. 特異点の解消により, U の開部分スキーム V が存在し, V は滑らかで射影的なスキーム X の開部分スキームである. $Z = X - V$ をその閉補集合とする. 次の長完全系列を見て,

$$\to H_c^{i-1}(Z_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H_c^i(V_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H_c^i(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to \qquad (6)$$

$H_c^*(Z_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))$ は帰納法の仮定より有限生成で, $H_c^*(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))$ は仮定より有限生成なので, $H_c^*(V_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))$ も有限生成である. 同様に $H_c^*(U_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))$ も有限生成である. □

定理 3.4. *a)* $n \leq 0$ とし, 特異点の解消を仮定する. そのとき, 予想 *3.2* が成り立つ.

b) X の次元が 1 ならば, 予想 *3.2* が成り立つ.

4. 例

$n \neq 0$ のとき, $w_n = |\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)^{\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q)}| = q^n - 1$ とし, $w_0 = 1$ とする. $\mathbb{F}_q$ のコホモロジーについて,

$$H^i_c((\mathbb{F}_q)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, i = 0, 1; \\ \mathbb{Z}/w_n & n \neq 0, i = 1; \\ 0 & \text{その他}. \end{cases} \tag{7}$$

をえる. $n = 0$ の場合は, $H^i_c((\mathbb{F}_q)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z})$ が群コホモロジー $H^i(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ と等しい事から従う. $n \neq 0$ の場合は, 有理係数のétale コホモロジーが消えるので, $H^{i,n}_c((\mathbb{F}_p)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}) = H^{i-1}((\mathbb{F}_p)_{\text{ét}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n)) = \mathbb{Z}/w_n$ を得る.

p-部分に対して, $n \geq 0$ の場合, $\chi(n) = n$ で, $n < 0$ の場合 $\chi = 0$ である.

従って, $s \mapsto n$ のとき,

$$\zeta(\mathbb{F}_q, s) = \frac{1}{1 - q^{-s}} = \pm(1 - q^{n-s})^{\rho_n} q^{\chi(n)} \cdot w_n^{-1}.$$

$X = \mathbb{P}^1 \coprod \mathbb{P}^1/0 \sim 0$ を十字形とする. 特異点を blow-up すると, 次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & X. \end{array}$$

$$\zeta(X, s) = \frac{1}{(1 - q^{-s})(1 - q^{1-s})^2}.$$

次の長完全系列を考える.

$$\cdots \to H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_c(\mathbb{P}^1_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))^{\oplus 2} \xrightarrow{0^*} H^i_c((\mathbb{F}_q)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to \cdots.$$

$s : \mathbb{P}^1 \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ を構造射とすると, $0^* \circ s^* = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_p}$ なので, 次の公式を得る.

$$H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \cong \ker\Big(H^i_c(\mathbb{P}^1_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))^{\oplus 2} \to H^i_c((\mathbb{F}_p)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))\Big).$$

projective bundle 公式によると,

$$H^i_c(\mathbb{P}^1_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \cong H^i_c((\mathbb{F}_p)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \oplus H^{i-2}_c((\mathbb{F}_p)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n-1))$$

であるから

$$H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \cong H^i_c((\mathbb{F}_q)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \oplus H^{i-2}_c((\mathbb{F}_q)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n-1))^{\oplus 2}.$$

方程式(7) を用いて,

$$\operatorname{rank} H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} 1 & (n,i) = (0,0),(0,1); \\ 2 & (n,i) = (1,2),(1,3); \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

$$|H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))_{tor}| = \begin{cases} w_n & i = 1; \\ w_{n-1}^2 & i = 3; \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る. 特に交代和は0で, 重さ付き交代和については, $\rho_0 = -1$, $\rho_1 = -2$, 他のnの場合$\rho_n = 0$である. eとの積は0なので, $\chi(H^*(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)), e) = w_n^{-1} \cdot w_{n-1}^{-2}$, $\chi(n) = 3n-2$で,

$$\zeta(X,s) = \pm(1-q^{n-s})^{\rho_n} \cdot q^{\chi(n)} \cdot w_n^{-1} \cdot w_{n-1}^{-2}.$$

$\mathbb{P}^1$の二つの異なる点a, bを同一視したスキームXをnodeと呼ぶ. Xの特異点をpと書くと, $X - p \cong \mathbb{A}^1 - \{0\}$なので,

$$\zeta(X,s) = \frac{1}{1-p^{1-s}}$$

を得る. eh-被覆図式

$$\begin{array}{ccc} a \coprod b & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \longrightarrow & X. \end{array}$$

から次の長完全系列を導く.

$$\cdots \to H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_c(\mathbb{P}^1_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \oplus H^i_c((\mathbb{F}_p)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_c((\mathbb{F}_p)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))^{\oplus 2} \to \cdots$$

この系列は前の例のように分裂する,

$$0 \to H^{i-1}_c((\mathbb{F}_p)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_c((\mathbb{P}^1)_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) \to 0.$$

projective bundle 公式により,

$$\operatorname{rank} H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)) = \begin{cases} 1 & (n,i) = (0,0),(0,2),(1,2); \\ 2 & (n,i) = (0,1); \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

$$|H^i_c(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n))_{tor}| = \begin{cases} w_n & i = 1,2; \\ w_{n-1} & i = 3; \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

交代和は 0 で, 重さ付き交代和は $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = -1$ で、他の n の場合 0 である. しかも, $\chi(H_c^*(X_{\mathrm{ar}}, \mathbb{Z}(n)), e) = w_{n-1}^{-1}$ で, $\chi(n) = n-1$ なので, $s \mapsto n$ のとき

$$\zeta(X, s) = \pm(1 - q^{n-s})^{\rho_n} \cdot q^{\chi(n)} \cdot w_{n-1}^{-1}$$

である.

References

[1] T.Geisser, Weil-étale cohomology over finite fields, Preprint 2002.
[2] T.Geisser, Arithmetic cohomology over finite fields and values of zeta-functions, Preprint 2004.
[3] S.Lichtenbaum, The Weil-étale topology, Preprint 2001.
[4] A.Suslin, V.Voevodsky, Singular homology of abstract algebraic varieties. Invent. Math. 123 (1996), no. 1, 61–94.
[5] A.Suslin, V.Voevodsky, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

University of Southern California, Department of Mathematics, DRB, 1042 W. 36th Place, Los Angeles, CA 90089